ガリレオ衛星の観測

インターネット望遠鏡プロジェクト

平成 23 年 9 月 12 日

1　観測の目的

本観測の目的は次の通りです：

1. 主望遠鏡で木星を観測し、木星の縞模様の存在を確認
2. 副望遠鏡で木星とその衛星であるガリレオ衛星を観測し、４個のガリレオ衛星イオ・エウロパ・ガニメデ・カリストを確認
3. ４個のガリレオ衛星の運動を継続観測し、それぞれの衛星の公転軌道半径を測定
4. ガリレオ衛星の公転周期と測定したた公転軌道半径の関係を調べ、これらの衛星の運動でケプラーの第三法則が成り立つことを検証
5. 公転軌道半径と公転周期を用いて、各衛星の公転速度を決定
6. 木星の質量を測定

2　観測の意義

2.1　ガリレオ衛星について

ガリレオ衛星と呼ばれているのは、1610 年ガリレオによって発見された木星の 4 個の衛星であり、内側から順にイオ (Io), エウロパ (Europa), ガニメデ (Ganymede), カリスト (Callisto) と名付けられています。ガリレオは、人類として初めて自作の天体望遠鏡を用いて、1610 年 1 月 7 日から 3 月 2 日までこれらの衛星を継続観測し、それが木星の衛星であることを発見しました。ガリレオ衛星は 5 等星前後の比較的明るい天体ですから、インターネット望遠鏡の副望遠鏡（サブ望遠鏡）を用いて容易に観測できます。

ガリレオ衛星の軌道半径、公転周期等のデータは、表 1 にあげた通りです。地球の衛星である月の半径は、1738km（質量 734.9×10^{20} kg) ですから、エウロパ以外の 3 個の衛星は、半径・質量ともに月よりも大きい天体であることがわかります。

この表からわかるように、一番内側の衛星イオの公転周期は約 1.8 日ですから、2 日間観測すればその間にイオは木星の周りを 1 回公転することになります。同様にして、エウロパは約 3.5 日、ガニメデは約 7 日、カリストは約 16.7 日で、木星を一周します。この結果、2ヶ月ほど継続観測すれば、この間に 4 個のガリレオ衛星が全て複数回木星の周りを公転します。

番号	名称	軌道半径 (10^4km)	公転周期 (日)	半径 (km)	質量 (10^{20}kg)	平均等級
J 1	イオ	42.18	1.769	1815	894	5.0
J 2	エウロパ	67.11	3.551	1569	480	5.3
J 3	ガニメデ	107.0	7.155	2631	1483	4.6
J 4	カリスト	188.3	16.69	2400	1077	5.6

表 1: ガリレオ衛星のデータ

2.2　ミニ太陽系としてのガリレオ衛星系

太陽系は、太陽と惑星間に作用する重力（万有引力）によって結合している天体系であり、木星とガリレオ衛星からなる天体系は、木星と衛星間に作用する重力で結合している天体系です。そこで、太陽を木星に置き換え、惑星をガリレオ衛星に置き換えれば、木星とガリレオ衛星系の構造はミニ太陽系と考えることができます。このことは、惑星の運動について成り立つ関係（ケプラーの法則）は、ガリレオ衛星の運動についても成り立つことを意味します。

2.3　惑星の運動に関するケプラーの 3 法則

ケプラーは、惑星の運動に関して次の 3 つの関係

1. 第 1 法則：各惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く
2. 第 2 法則：面積速度は各惑星ごとに一定である
3. 第 3 法則：各惑星の公転周期の 2 乗は、その惑星の公転半径の 3 乗に比例し、比例係数は全ての惑星について共通である

が成り立つことを明らかにしました。これを惑星の運動に関するケプラーの 3 法則といいます。

ケプラーの法則の意味を少し詳しく見ると、以下のようになります：

1. 第 1 法則

   第 1 法則は、円軌道の複雑な組み合わせで惑星の運動を説明してきた従来の考え方に対して、楕円軌道という新しい概念を導入することによって、惑星の運動を簡潔に表現することに成功しました。

2. 第 2 法則

   第 2 法則は、惑星がその軌道上を運動するするときに、太陽から遠い位置にあるときはゆっくり移動し、近い位置にあるときは速く移動することを意味するもので、各軌道上での惑星の動き方の様子を定量的に説明するものです。

3. 第 3 法則

   第 3 法則は、個々の惑星を超えて全ての惑星に関して、それらの公転軌道半径と公転周期の間に共通な関係が成り立つことを示したもので、第 1 法則および第 2 法則とはその意味合いが少し違っています。

2.4 ガリレオ衛星観測の意義

ケプラーの法則は、天文学的にもまた物理学的にも重要な意味を持ちます。特に、第 3 法則は個々の惑星の運動を超えて、全ての惑星の運動に関して成り立つ関係であり、他の 2 つの法則とは別の意味で重要です。しかしながら、惑星の運動を観測することによって、ケプラーの第 3 法則が成り立つことを検証するのは、惑星の公転周期が長いこと（木星で約 12 年、海王星では約 165 年）から不可能です。

上で述べたように、木星とガリレオ衛星からなる天体系はミニ太陽系と考えることが可能であり、これらの衛星の運動でもケプラーの 3 つの法則が成り立ちます。そこで、ガリレオ衛星の運動を利用してケプラーの第 3 法則を検証することを考えてみます。すでに注目したように、ガリレオ衛星を 2ヶ月あまり継続観測すると、4 個の衛星の全てが複数回木星の周りを公転しますから、この観測データを利用してケプラーの第 3 法則の検証が可能となります。

また、ガリレオ衛星の公転周期と公転軌道半径から、木星の質量を計算することも可能です。その意味で、ガリレオ衛星はケプラーの第 3 法則を検証し、木星の質量を測定するための、宇宙における観測対象天体系という意味を持ちます。

3 観測のプロセス

3.1 観測装置と観測の手順

観測装置としては、慶應義塾大学インターネット望遠鏡ネットワーク

`http://arcadia.koeki-u.ac.jp/itp/`

を利用します。この装置を利用したガリレオ衛星の観測手順は以下の通りです：

1. 慶應義塾大学インターネット望遠鏡のホームページにアクセス
2. ホームページからインターネット望遠鏡ログイン画面へアクセス
3. ログイン画面の世界地図上で、ネットワーク上で用意された 3 台の望遠鏡（府中望遠鏡、慶應義塾ニューヨーク学院望遠鏡、イタリア・メラーテ望遠鏡）から、アクセスしたい望遠鏡を選び、それが夜の時間帯にあること、望遠鏡が設置されている場所の天候が天体観測可能であることを確認
4. アクセスしたい望遠鏡が天体観測可能な状況にあれば、世界地図上で該当の望遠鏡マークをクリックし、望遠鏡にログインし、望遠鏡操作画面を立ち上げ

5. 望遠鏡操作画面上の静止画フレームをサブ望遠鏡の画像に設定し、この画面中央に木星を導入する。木星の導入は、天体リスト欄から木星を選択し、それが地平線上にあることを確かめたのち、導入ボタンをクリック

6. 静止画面上に映し出された天体上にカーソルを重ねることによって、天体の名前（木星とガリレオ衛星）を確認し、その画面を右クリックして画像を PC 上に保存。保存した画面には、観測場所（使用した望遠鏡の設置場所)、観測日時（日本時間で観測日、観測時間を分単位まで）を記録

7. 静止画面を左ダブルクリックして、その画面の拡大画面を立ち上げ、拡大画面上の２つの天体間の分離角を測定。分離角の測定には、画面上の該当の 2 つの画面をそれぞれクリック（天体間の角度は右の欄に表示)。

8. 木星と各ガリレオ衛星間の分離角を全て測定し、その結果を記録。このとき、画面上で衛星が木星の左側にある場合は負の角度、右側にある場合は正の角度として記録。

3.2 観測データの記録

観測データを記録するために、表 2 を用意します。表の各列の意味は次の通りです。

- 第 1 列

  個人での観測の場合には観測者名は必要ありません。もしグループで分担して観測する場合には、観測者名の記録は後の解析の時の参考として便利です。

- 第 2 列

  観測に使用した望遠鏡の設置場所を記録します。

- 第 3 列

  観測日時を記録します。表 2 の第 1 行では、観測年（西暦 2011 年を 11)、観測月（8 月を 08)、観測日（21 日を 21)、観測時間（10 時を 10)、観測分（54 分を 54）を表します。

- 第 4 列、5 列、6 列、7 列

  各衛星と木星の分離角を度単位で記録します。

- 第 8 列

  画面上に保存した木星と衛星の画面の番号を記します。

観測者	観測地	観測日時	イオ	エウロパ	ガニメデ	カリスト	画像番号
	NY	1108211054	00206	−0.0433	0.0356	−0.0779	1
	Fuchu	1108222303	0.0233	0.0525	−0.0799	0.1163	2

表 2: 分離角の観測データ記録例

4　観測データの解析

4.1　木星と衛星の距離

木星と衛星の距離[1] r は、分離角 θ と木星と地球の距離 r_{EJ} の積

$$r(t) = \theta(t) \times r_{EJ}(t) \tag{1}$$

で与えられます。ここで、t は観測年の世界時 1 月 1 日から観測日時までの経過時間を日単位で表したものを意味します。$\theta(t)$ は、ラジアン単位で表した分離角を表します。ラジアン単位の角度と度単位の角度の関係は

$$\theta(\text{ラジアン}) = \pi \times \frac{\theta(\text{度})}{180} \tag{2}$$

です。ここで π は円周率を表します。

地球と木星は、それぞれの軌道に沿って移動しているので、時間の経過によって地球と木星間の距離は変化します。したがって、式 (1) の $r_{EJ}(t)$ は、各観測時刻における地球と木星間の距離となります。$r_{EJ}(t)$ の求め方は付録で説明します。

4 個の衛星のそれぞれについて、各観測時刻ごとの $r(t)$ を求め、その結果をグラフ（横軸を t、縦軸を $r(t)$ にとる）上にプロットします。イオ、エウロパ、ガニメデ、カリストのそれぞれについて、観測データをプロットした 4 つのグラフを作成します。

4.2　観測データを再現する最適曲線

ケプラーの第 1 法則で述べられているように、ガリレオ衛星の公転軌道は木星を 1 つの焦点とする楕円を描きますが、楕円軌道の円軌道からのずれは小さいので（離心率が小さいので）、ここでは近似的にガリレオ衛星の軌道は円とみなすことにします。

この場合、地球からみた衛星の運きは、木星を中心としてその左右に周期的な往復運動となり、衛星と木星間の距離（視線方向に垂直な方向の距離）$r(t)$ は

$$r(t) = A\sin\Big(\frac{2\pi}{P}t\Big) + B\cos\Big(\frac{2\pi}{P}t\Big) \tag{3}$$

[1] 正確には、地球から木星を見たときの視線方向に垂直な距離

と表されます。ここで P はそれぞれの衛星の公転周期（単位：日）を意味します。係数 A と B はまだ未定ですが、4.1 節で作成した $r(t)$ のグラフ上に式 (3) の曲線を描いた時、その曲線が観測データをもっともよく再現するように決めることにします。このように決められた曲線を最適曲線と呼びます。最適曲線の係数 A, B の求め方は付録に与えてあります。

イオ、エウロパ、ガニメデ、カリストのそれぞれについて、最適曲線を求めると、各衛星の公転軌道半径 a は

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{4}$$

で与えられます。得られた結果を表 3 に記入します。

この解析では各衛星の公転周期は既知として考えていますので（付録参照）、この表の第 5 列に記載してある公転周期は、表 1 に記載してあるものと同じです。

	A (10^4km)	B (10^4km)	a (10^4km)	P（日）
イオ				1.769
エウロパ				3.551
ガニメデ				7.155
カリスト				16.69

表 3: 軌道半径と公転周期

4.3　ケプラーの第 3 法則の検証

ケプラーの第 3 法則は、惑星の公転周期の 2 乗は軌道半径の 3 乗に比例することを明らかにしたものです。

ここでは各衛星の公転周期 P と軌道半径 a の関係を調べてみます。そのために a の 3 乗を横軸に、P の 2 乗を縦軸にしたグラフ上に、表 3 に記載した各衛星のデータをプロットします。プロットされた 4 個の点が、ほぼ直線で結ばれるとき、ガリレオ衛星の公転運動では、ケプラーの第 3 法則が成り立つことが確かめられたことになります。

ケプラーの第 3 法則は

$$P^2 = \kappa a^3 \tag{5}$$

で表されます。グラフ上に式 (5) で与えられる直線をひいたとき、プロットされた点がよく再現されるように係数 κ を選ぶことで、最適直線を求めることができます。

最適曲線の傾き κ は、ガリレオ衛星の a_i, P_i $(i = 1.2.3.4)$ を用いて

$$\kappa = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_i^2 a_i^3}{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_i^6} \tag{6}$$

で与えられます（付録参照）。ここで $i = 1$ はイオ、$i = 2$ はエウロパ、$i = 3$ はガニメデ、$i = 4$ はカリストを意味します。また記号 $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}$ は、$i = 1, 2, 3, 4$ について和を取ることを意味しています。

式 (23) に表 3 に記載された a と P を代入すれば、最適直線の傾きが求められます。

4.4　木星の質量

木星の質量 M_J は、各ガリレオ衛星の公転周期 P と軌道半径 a を用いて

$$M_J = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right) \times \left(\frac{a^3}{P^2}\right) \tag{7}$$

で与えられます。ここで、$G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$ は万有引力定数です。

これまで、軌道半径 a の単位は 10^4km を、また公転周期 P の単位は日を用いてきましたが、式 (7) から M_J を求めるに当たっては、a の単位を m に、P の単位を秒（s）に換算し直して計算することが必要です。この点に注意しましょう。各衛星のデータから求めた木星の質量を表 4 に記入します。

	a (10^7m)	P (10^5s)	M_J (10^{27}kg)
イオ			
エウロパ			
ガニメデ			
カリスト			

表 4: 木星の質量

得られた木星の質量にはばらつきがあることがわかります。木星の質量の測定結果として、表 4 の平均値を使うこともできますが、より正確な測定値はケプラーの第 3 法則を利用して、直線の傾き κ から

$$M_J = \frac{4\pi^2}{\kappa G} = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right) \times \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_i^6}{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_i^2 a_i^3}\right) \tag{8}$$

で求めることができます。これを表 5 に記入します。

	平均の値 (10^{27}kg)	傾きからの値 (10^{27}kg)
M_J		

表 5: 木星の質量

4.5　ガリレオ衛星の公転速度

ガリレオ衛星の軌道半径 a と公転周期 P がわかったので、各衛星が軌道上を移動する速さ（楕円の場合は平均の速さ）v は

$$v = \frac{2\pi a}{P} \tag{9}$$

で与えられます。得られた結果を表 6 に記入します。

	v (km/s)
イオ	
エウロパ	
ガニメデ	
カリスト	

表 6: 衛星の公転速度

5 結果のまとめ

観測結果をまとめます。

5.1 ガリレオ衛星の軌道半径と公転周期

ガリレオ衛星の軌道半径と公転周期

	測定値	既知のデータ	既知のデータ
	軌道半径 a (10^4km)	軌道半径 a (10^4km)	公転周期 P (日)
イオ		42.18	1.769
エウロパ		67.11	3.551
ガニメデ		107.0	7.156
カリスト		188.3	16.69

5.2 ケプラーの第 3 法則の検証

5.3 木星の質量

木星の質量

	平均の値 (10^{27}kg)	傾きからの値 (10^{27}kg)	既知のデータ (10^{27}kg)
M_J			1.90

5.4 ガリレオ衛星の公転速度

ガリレオ衛星の公転速度

	測定値 v(km/s)	既知のデータ v(km/s)
イオ		17.3
エウロパ		13.7
ガニメデ		10.9
カリスト		8.19

6　考察

6.1　ガリレオ衛星の軌道半径と公転周期

6.2　ケプラーの第 3 法則の検証

6.3　木星の質量

6.4　ガリレオ衛星の公転速度

6.5　総合的な考察

7　付録

7.1　地球と木星の距離

7.1.1　惑星の位置の表し方

宇宙における惑星の位置を表すには、一つの座標系を決めることが必要となります。座標系の選び方はいろいろありますが、ここでは太陽を原点とし、地球の公転面上に (x, y) 軸、公転面に垂直に z 軸をもつ、3次元直行座標系を取ることにします。

この座標系では、地球は (x, y) 平面上にあります（地球の位置を表す z 座標がゼロである）。地球以外の惑星は、それらの各惑星の公転面が地球の公転面に対してわずかですが傾いているので、その位置を表すには (x, y, z) の3成分の全てが意味を持ちます。

7.1.2　惑星の位置

惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描きますが、このテキストの範囲内では、惑星の公転軌道を近似的に円と考えることが出来ます。その理由は、各惑星の公転軌道が楕円が円からどれだけずれているかを示す離心率 $e(0 \leq e < 1; e = 0$ は円$)$ は、非常に小さく近似的には円軌道とみなせるからです。

1. 地球の位置

$$
\begin{aligned}
x_E(t) &= a_E \cos\Big(\frac{2\pi}{P_E}t + \widetilde{\omega}_E\Big) \\
y_E(t) &= a_E \sin\Big(\frac{2\pi}{P_E}t + \widetilde{\omega}_E\Big) \\
z_E &= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここで、$(x_E(t), y_E(t), z_E(t))$ は時刻 t の地球の位置座標、a_E と P_E はそれぞれ地球の公転軌道半径と公転周期を、また $\widetilde{\omega}$ は地球の近日点黄経を表します。

2. 惑星の位置

$$
\begin{aligned}
x_J(t) &= a_J\Big\{\cos\Omega_J \cos\Big(\frac{2\pi}{P_J}t + L_J - \Omega_J\Big) - \cos i_J \sin\Omega_J \sin\Big(\frac{2\pi}{P_J}t + L_J - \Omega_J\Big)\Big\} \\
y_J(t) &= a_J\Big\{\sin\Omega_J \cos\Big(\frac{2\pi}{P_J}t + L_J - \Omega_J\Big) + \cos i_J \cos\Omega_J \sin\Big(\frac{2\pi}{P_J}t + L_J - \Omega_J\Big)\Big\} \\
z_J(t) &= a_J \sin i_J \sin\Big(\frac{2\pi}{P_J}t + L_J - \Omega_J\Big)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで、$(x_J(t), y_J(t), z_J(t))$ は時刻 t の惑星の位置座標、a_J と P_J はそれぞれ惑星の公転軌道半径と公転周期、i_J はその惑星の公転面の地球の公転面に対する傾角、Ω_J と L_J はそれぞれその惑星の昇交点黄経と平均黄経を表します。

3. 式 (10) の読み方

地球の公転軌道半径 a_E と公転周期 P_E は、地球の公転運動に固有な量であり、その値は天文年鑑に与えられています。また、地球の近日点黄経 $\widetilde{\omega}$ は時間の経過につれ

てゆっくりと変化しますが、時間の経過によるその値の変化は非常に小さいので、このテキストではその年１年間は $\tilde{\omega}$ は定数であるとみなしその年初（世界時間 UT の１月１日）における値を使用します。$\tilde{\omega}$ の年初の値は天文年鑑に与えられています。時刻 t はその年の年初から当該日時までの経過日数を表しています。

したがって、ある日時の地球の位置を求めるには、その年の年初から当該日時までに経過した日数を t とし (経過時間と経過分は日単位に換算して加える)、a_E, P_E と $\tilde{\omega}_E$ のその年の年初における値を、それぞれ式 (10) に代入すれば、その日時の地球の位置座標 $(x_E(t), y_E(t), z_E(t))$ が求められます。

4. 式 (11) の読み方

   惑星の公転軌道半径 a_J と公転周期 P_J および公転面の傾角 i_J は、その惑星に固有な量であり、それらの値は天文年鑑に与えられています。昇交点黄経 Ω_J と平均黄経 L_J は時間の経過につれて少しずつ変化しますが、その変化はわずかなのでこのテキストではその１年間は定数とみなし、その年初の値を使用します。Ω_J と L_J の年初の値はは天文年鑑に与えられています。

   地球の場合と同様に、ある日時の惑星の位置を求めるには、その年の年初から当該日時までに経過した日数を t とし、a_J, P_J, i_J と Ω_J, L_J のその年の年初における値を、それぞれ式 (11) に代入すれば、その日時の地球の位置座標 $(x_J(t), y_J(t), z_J(t))$ が求められます。

7.1.3　地球と木星の距離の求め方

木星と地球間の距離 $r_{EJ}(t)$ は

$$r_{EJ}(t) = \sqrt{(x_E(t) - x_J(t))^2 + (y_E(t) - y_J(t))^2 + (z_E(t) - z_J(t))^2} \tag{12}$$

で与えられます。式 (12) に、式 (10) と式 (11) を代入すると、任意の時刻 t における地球と木星間の距離が求められます。

7.2　最適曲線の求め方（衛星の軌道）

ガリレオ衛星の公転軌道も楕円ですが、その離心率は小さいので、近似的に円運動とみなすことができます。また、木星の自転軸に対して各衛星の公転面はほぼ垂直ですので、近似的にはガリレオ衛星は同じ平面上で運動しているものとみなすことにします。

この場合、衛星の公転面の上方から見れば、衛星が木星を中心とする円軌道を描いて移動しますが、それを横から見れば木星の左右に往復運動しているように見えることになります。地球から見たときのガリレオ衛星の運動の様子はこれと同じで、４個のガリレオ衛星がそれぞれ固有の振幅と周期で、木星を中心として左右に振動運動していることが観測されます。

木星と衛星の距離を $r(t)$ としたとき、これらの振動運動は三角関数を用いて

$$r(t) = A\sin\Big(\frac{2\pi}{P}t\Big) + B\cos\Big(\frac{2\pi}{P}t\Big) \tag{13}$$

と表されますここで、P はガリレオ衛星の公転周期を表します。A と B は、各ガリレオ衛星の観測データから決めるべき量であり、これらの量が決まればそれらの衛星の公転半径 a は、$a=\sqrt{A^2+B^2}$ で与えられます。

式 (13) で表される曲線の形は、係数 A, B と公転周期 P で決まります。ガリレオ衛星の観測データ（地球から見たときの木星と衛星の分離角 $\theta(t_i); i=1,2,\cdots,N$:$t_i$ は観測日時）から決められる最適曲線は、そのデータ群を可能な限り再現するように曲線の形を決める３個の要素（A, B, P）を設定することによって求めることができます。

最適曲線の求め方にはいろいろありますが、このテキストでは最小２乗法を用いることにします。最小２乗法は、各観測日時 $t_i; i=1,2,\cdots,N$ における衛星と木星の距離の観測値 $r(t_i)=\theta(t_i)r_{EJ}(t_i)$ と、式 (13) で与えられる $r(t_i)=A\sin\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)$ の差の２乗

$$\left\{\theta(t_i)r_{EJ}(t_i)-\left(A\sin\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)\right)\right\}^2; i=1,2,\cdots,N \tag{14}$$

の全ての t_i についての和 S

$$S=\sum_{i=1}^{N}\left\{\theta(t_i)r_{EJ}(t_i)-\left(A\sin\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)\right)\right\}^2 \tag{15}$$

が最小になるように、曲線の要素（A, B, P）を選ぶ方法です。ここで、$\theta(t_i)$ は観測日時 t_i におけるガリレオ衛星と木星の分離角の測定値であり、$r_{EJ}(t_i)$ は日時 t_i の地球と木星間の距離を表します（$r_{EJ}(t_i)$ は式 (12) から求められます）。このことから分かるように、全ての観測日時について、全体として各日時の観測データとその日時における曲線上の点のずれが小さくなるように、曲線の形を決める方法といえます。

上に述べたように、衛星の運動を表す曲線の要素には、A, B, P がありますが、このテキストでは公転周期 P はすでに分かっているものとして、残りの２つの要素 A と B を、最小２乗法を用いて求めることにします。この場合、P の値としては、天文年鑑に与えられているデータを用います。

公転周期 P_G としては天文年鑑のデータを使うことにして、式 (15) の S が最小にする A と B は、次の式

$$A=\frac{K_3K_4-K_2K_5}{K_1K_3-K_2^2} \tag{16}$$

$$B=\frac{K_1K_5-K_2K_4}{K_1K_3-K_2^2} \tag{17}$$

から求められます。ここで、$K_1, K_2, \cdots, K_5$ は

$$K_1\equiv\sum_{i=1}^{N}\sin^2\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right),\qquad K_2\equiv\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right)\cos\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right) \tag{18}$$

$$K_3\equiv\sum_{i=1}^{N}\cos^2\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right),\qquad K_4\equiv\sum_{i=1}^{N}r_{EJ}(t_i)\theta(t_i)\sin\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right) \tag{19}$$

$$K_5\equiv\sum_{i=1}^{N}r_{EJ}(t_i)\theta(t_i)\cos\left(\frac{2\pi}{P}t_i\right) \tag{20}$$

で定義される。ここで、K_1, K_2, K_3 は、観測日時 $t_i; i = 1, 2, \cdots, N$ と、公転周期 P_G から計算できます。一方、残りの K_4, K_5 は観測データ $\theta(t_i); i = 1, 2, \cdots, N$ と、各観測日時の地球と木星間の距離 $r_{EJ}(t_i)$ を用いて計算できます。

したがって、まず式 (19),(20),20) で定義された K_i を計算し、それを式 (17) と (17) に代入すれば、曲線の 2 つの要素 A, B が求められ、それを用いて衛星の公転半径 $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ の大きさを求めることができます。これが、分離角の観測データ $\theta(t_i); i = 1, 2, \cdots, N$ から、衛星の公転半径を決定する手続きです。

7.3　最適直線の求め方（ケプラーの第 3 法則）

ケプラーの第三法則は、太陽系の惑星の公転周期 P の 2 乗が、公転半径 a の 3 乗に比例する

$$P^2 = \kappa a^3 \tag{21}$$

ことを示しています。ここで、比例係数 κ は

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{GM_J} \tag{22}$$

であり、また式 (22) 中の $G = 6.672 \times 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$ は万有引力定数を表します。

４個のガリレオ衛星の公転周期 P_i と公転軌道半径 a_i（i=1,2,3,4：i=1；イオ、i=2；エウロパ、i=3；ガニメデ、i=4；カリスト）の観測データを、P_i^2 を縦軸、a_i^3 を横軸にしたグラフ上に、プロットした４個の点を結ぶ最適直線は、観測データで与えられる４個の点と対応する直線状の点とのずれの 2 乗の和が最小になるように選ぶと、

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_i^2 a_i^3}{\sum_{i=1}^{4} a_i^6} \tag{23}$$

となります。

式 (22) と (23) から、木星の質量は

$$M_J = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right) \times \left(\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i^6}{\sum_{i=1}^{4} P_i^2 a_i^3}\right) \tag{24}$$

となります。これは４つの衛星のそれぞれのデータから求めた木星の質量の平均値ではなく、最適直線の傾きから求めたものであり、ガリレオ衛星の運動から木星の質量を測定するにはこの手続きがより望ましい計算法といえます。式 (24) の右辺に観測データを代入して計算すれば、観測データから木星の質量を決定することができます。この計算を行うときは、公転半径 a の単位をメートル、公転周期の単位を秒で表す必要がありますので、長さと時間の単位に注意しましょう。