球面三角法

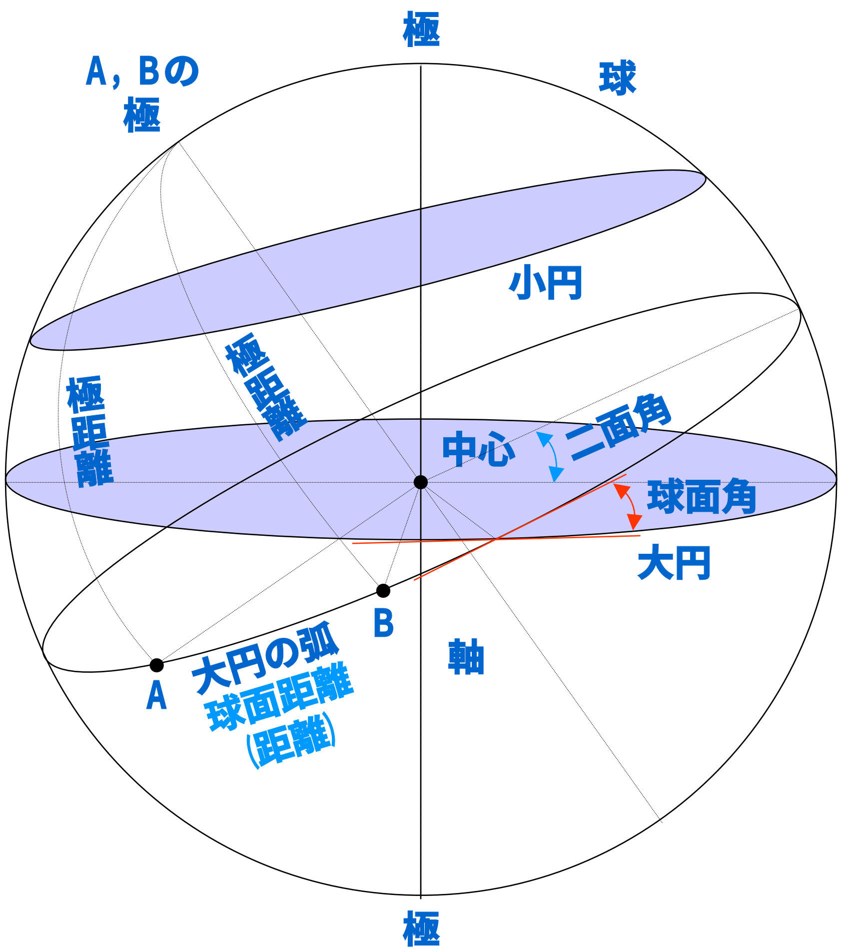
天文基礎講座　－その２－

株式会社　五藤光学研究所
児玉光義

大円の交角

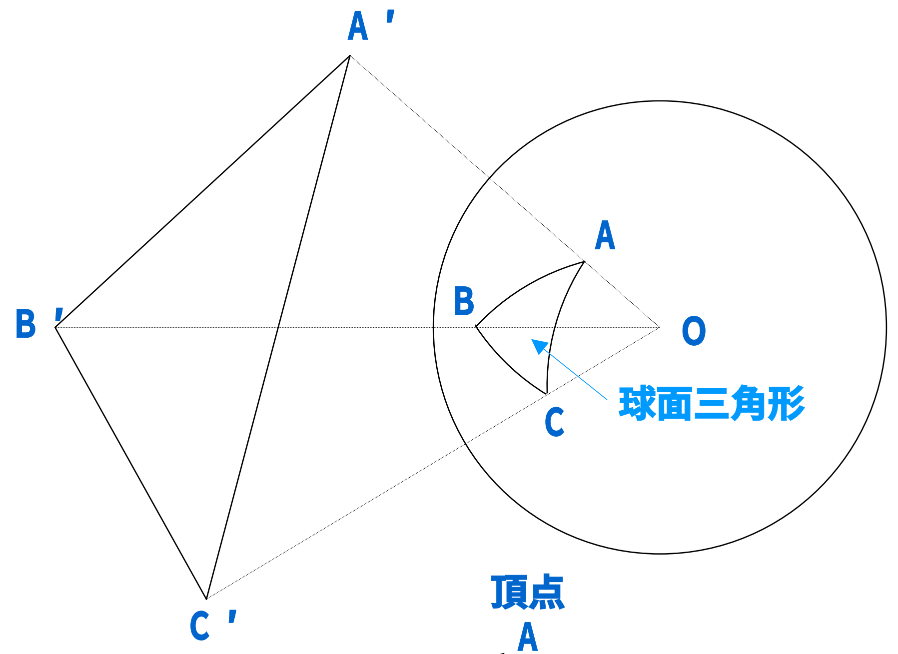
一般に、球面と平面の交わりは円です。平面が球の中心を通るとき、その交わりを**大円**、中心を通らないときを**小円**といいます。
また、平面に垂直な球の直径を、その円の**軸**、軸の両端をその円の**極**といいます。
球面上に、一つの直径の両端でない任意の２点をとれば、中心とともにこれらの点はただ一つの平面を決定します。従って、球面上に２点、Ａ，Ｂを与えれば、Ａ，Ｂを通る大円はただ一つです。この大円はＡ，Ｂで二つの弧に分かれます。このうち劣弧をＡ，Ｂを結ぶ**大円の弧**といい、その弧の長さＡＢを点Ａ，Ｂ間の**球面距離**、または単に**距離**といいます。円周上の各点は、その一つの極から等しい距離にあり、これを**極距離**といいます。
一般に、ある点で交わる二つの**曲線の交角**というのは、その点における二つの曲線の接線のなす角をいいます。特に、二つの大円の交角を**球面角**という場合があります。

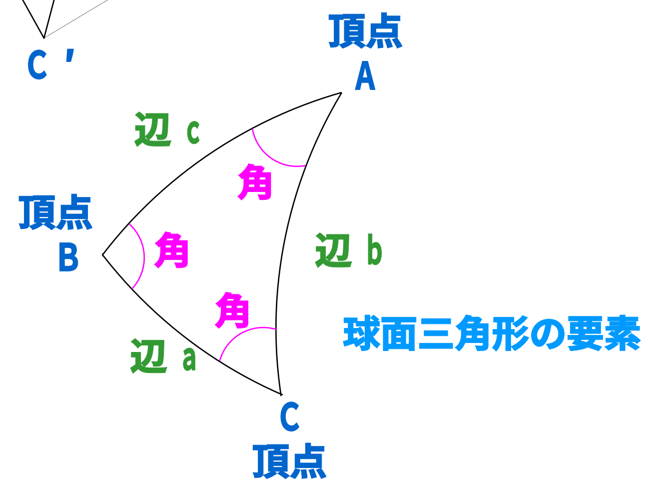
定理1：二つの大円の交角は、その大円を含む二つの平面の作る二面角に等しい。



球面三角形

球の中心Ｏを頂点とする三角錐ＯＡ′Ｂ′Ｃ′の球面との交わりは、三つの大円の弧からなる図形で、この図形を**球面三角形**といいます。三つの弧ＡＢ，ＢＣ，ＣＡを**辺**、２辺の交点をその**頂点**、各頂点における交角をその**角**といいます。
球面三角形の三つの辺および三つの角をその**要素**といいます。頂点Ａ，Ｂ，Ｃにおける角をそれぞれＡ，Ｂ，Ｃで表し、辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢをそれぞれａ，ｂ，ｃで表します。
球の半径をｒとすれば、ａ／ｒ，ｂ／ｒ，ｃ／ｒはそれぞれ面角ＢＯＣ，ＣＯＡ，ＡＯＢの弧度を表します。
従って、とくに半径１の球、即ち**単位球面上**の球面三角形の３辺の長さａ，ｂ，ｃは、三角形の三つの面角の弧度を表します。





極三角形

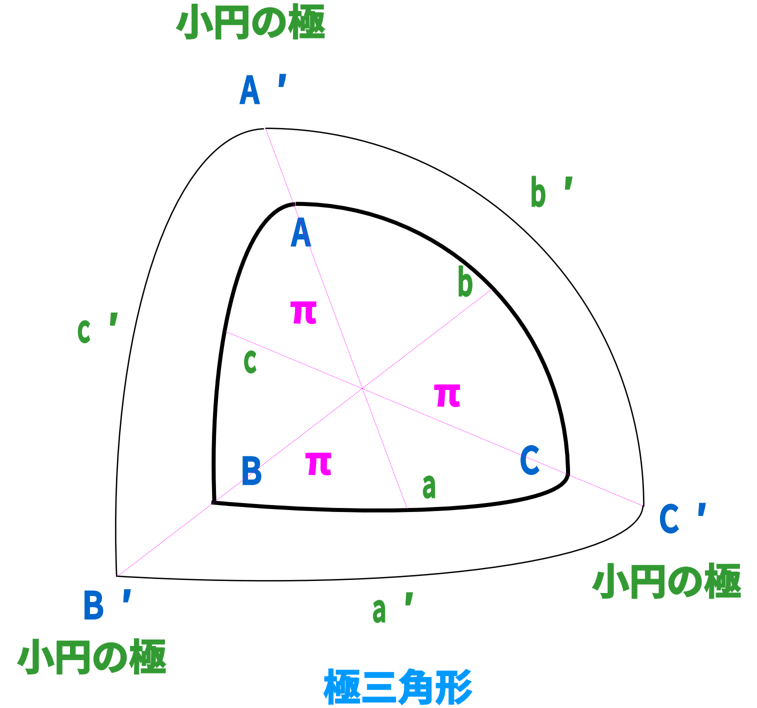
大円の極は、どれもその円周上の点から等しい距離にあります。小円の二つの極のうち、円周上の点から近い距離にある極を単に**小円の極**といいます。与えられた球面三角形について、特別の関係にある球面三角形を作ることができます。
いま、球面三角形ＡＢＣにたいして、ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの極をそれぞれＡ’，Ｂ’，Ｃ’とします。ただし、Ａ，Ａ’は辺ＢＣについて、Ｂ，Ｂ’は辺ＣＡについて、Ｃ，Ｃ’は辺ＡＢについていてどれも同じ側にあるものとします。このとき球面三角形Ａ’Ｂ’Ｃ’をＡＢＣの**極三角形**といいます。

定理2：球面三角形Ａ’Ｂ’Ｃ’が、球面三角形ＡＢＣの極三角形であれば、ＡＢＣはＡ’Ｂ’Ｃ’の極三角形である。

定理3：二つの球面三角形ＡＢＣ，Ａ’Ｂ’Ｃ’が互いに他の極三角形であれば、次の関係が成り立つ。

$a+A'=\pi,\quad b+B'=\pi,\quad c+C'=\pi$

$a'+A=\pi,\quad b'+B=\pi,\quad c'+C=\pi$



定理4：球面三角形の辺および角の間には次の定理が成り立つ。

(1)　$b+c>a,\quad c+a>b,\quad a+b>c$
(2)　$a+b+c<2\pi$
(3)　$\pi<A+B+C<3\pi$

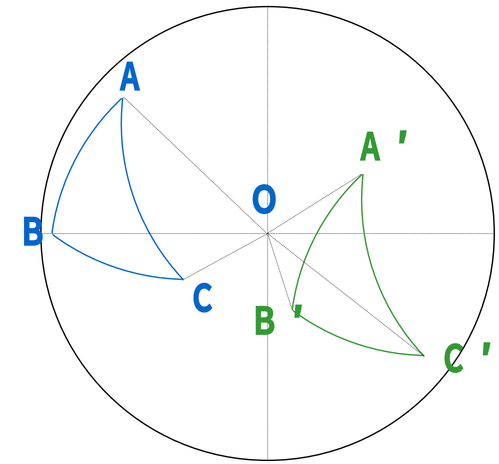
球面三角形の合同と対称

同一の球面かまたは等しい球面上にある二つの球面三角形について、対応する三つの辺と三つの角が同じ向きに順に等しいとき、これらの三角形は**合同**であるといいます。これに反して、反対向きに順に等しいとき、これらの三角形は**対称**であるといいます。今後、特に断らないときは、二つの球面三角形は同じ球面上にあるか、または等しい球面上にあるものとします。

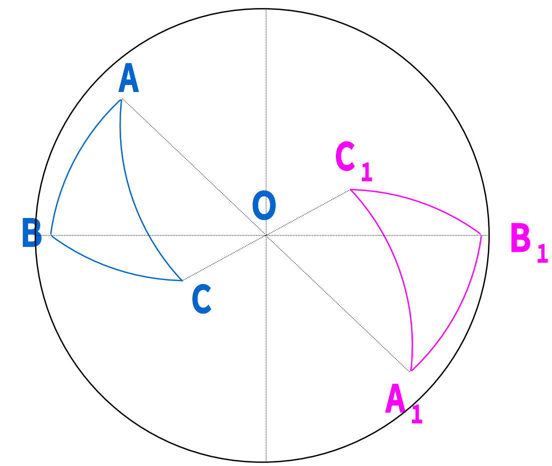
ＯをＡ中心とする球面上に三角形ＡＢＣがあるとき、三角形Ｏ－ＡＢＣを作ることができます。この頂点Ｏを固定して三角形を移動し、半径ＯＡ，ＯＢ，ＯＣの新しい位置をＯＡ′，ＯＢ′，ＯＣ′とすれば、球面三角形Ａ′Ｂ′Ｃ′はＡＢＣに合同です。

また、球面三角形ＡＢＣの各頂点Ａ，Ｂ，Ｃの中心Ｏについての対称点をそれぞれ$Ａ_1$，$Ｂ_1$，$Ｃ_1$とすれば、球面三角形$Ａ_1$，$Ｂ_1$，$Ｃ_1$はＡＢＣに対称です。このような三角形ＡＢＣ，　$Ａ_1Ｂ_1Ｃ_1$を**対極三角形**といいます。

合同な二つの球面三角形は全く重ね合わせることができますが、対称な球面三角形は重ね合わせることができません。しかし、対称なものは対極三角形の位置に置くことができます。



球面三角形の合同



球面三角形の対称

辺と角の大小関係

定理5：2辺およびその夾角が等しい二つの球面三角形は、合同であるかまたは対称である。

定理6：二つの角およびその頂点間の辺がそれぞれ等しい二つの球面三角形は、合同であるかまたは対称である。

定理7：三つの辺がそれぞれ等しい二つの球面三角形は、合同であるかまたは対称である。

定理8：三つの角がそれぞれ等しい二つの球面三角形は、合同であるかまたは対称である。

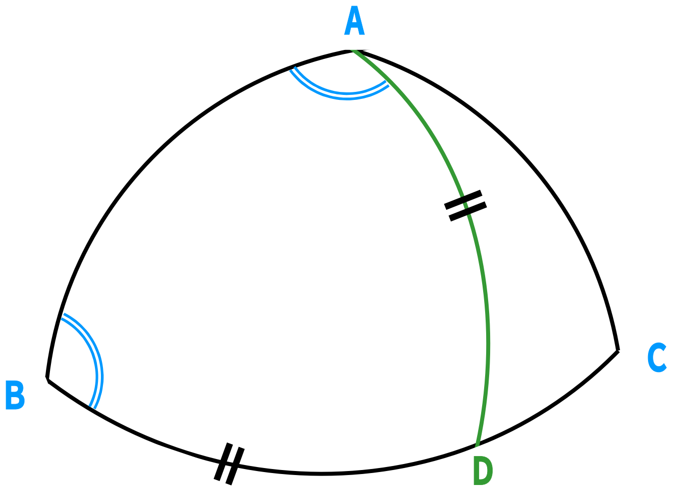
定理9：一つの球面三角形の2辺が等しいとき、それらの対角も等しい。この逆も成り立つ。

球面三角形の２辺が等しいとき、これを**二等辺球面三角形**といい、３辺が等しいときは**等辺球面三角形**といいます。
これに対して、３辺がすべて異なるとき、これを**不等辺球面三角形**といいます。

不等辺球面三角形では、つぎの定理が成り立ちます。

定理１０：球面三角形ＡＢＣでＡ＞ＢならばＢＣ＞ＡＣである。

定理１１：球面三角形で、大きい辺の対角は小さい辺の対角より大きい。

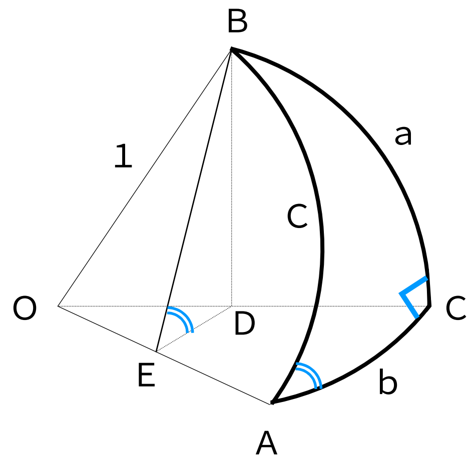


直角球面三角形

球面三角形の一つの角が直角に等しいとき、これを**直角球面三角形**といい、どの角も直角に等しくないとき、**斜角球面三角形**といいます。
球面三角形の三つの角の和は、πより大きく３πより小さいから、二つの角が直角に等しい場合と、三つの角が直角に等しい場合があります。前者を**二直角球面三角形**、後者を**三直角球面三角形**といいます。
また、球面三角形で、１辺が大円の周の１／４に等しいとき、これを**象限弧球面三角形**といい、２辺がともに大円の周の１／４に等しいとき、**二象限弧球面三角形**といいます。同様に、３辺が大円の周の１／４に等しいとき、**三象限弧球面三角形**といいます。二象限弧（三象限弧）球面三角形は、二直角（三直角）球面三角形です。

それでは、直角球面三角形について成り立つ関係式を求めてみましょう。

いま、球面三角形ＡＢＣでＣ＝π／２とし、まず、ａ＜（π／２），ｂ＜（π／２）の場合を考えます。



各頂点を球の中心Ｏに結び、

ＢＤ⊥ＯＣ，　ＤＥ⊥ＯＡ

を作ります。Ｃ＝（π／２）ですから、二つの平面ＢＯＣ，ＡＯＣは垂直です。従って、ＢＤは平面ＡＯＣに垂直です。
故に、三垂線の定理から、ＢＥもＯＡに垂直となって、∠ＢＥＤは二つの平面ＡＯＢ，ＡＯＣの二面角、即ち角Ａに等しい。よって直角三角形ＢＤＥについて、

$$\sin A = \sin BED = \frac{BD}{BE} = \frac{\sin a}{\sin c}$$

同様に $\sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c}$

つぎに $\cos A = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{DE}{OE} / \dfrac{BE}{OE} = \dfrac{\tan b}{\tan c}$

同様に $\cos B = \dfrac{\tan a}{\tan c}$

従って $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\tan a}{\sin b}$, $\tan B = \dfrac{\tan b}{\sin a}$

また $\cos c = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OD}{OB} \cdot \dfrac{OE}{OD} = \cos a \cos b$

$$(2.1)$$

であるから

$$\frac{\cos B}{\cos b} = \frac{\tan a}{\tan c} \cdot \frac{1}{\cos b} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos a \cos b}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin c}$$

$\therefore$ $\sin A = \dfrac{\cos B}{\cos b}$, $\sin B = \dfrac{\cos A}{\cos a}$

この値を（2.1）に代入すれば、

$$\cos c = \frac{\cos A}{\sin B} \cdot \frac{\cos B}{\sin A} = \cot A \cot B$$

定理1：C=（π/2）の球面三角形ABCにおいて、つぎの関係式が成り立つ。

$$\mathbf{\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\cos B}{\cos b}}$$

$$\mathbf{\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\cos A}{\cos a}}$$

$$\mathbf{\cos A = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}}$$

$$\mathbf{\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan B = \frac{\tan b}{\sin a}}$$

$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b = \cot A \cot B}$$

C＝（π/2）の平面直角三角形と球面直角三角形との比較

平面直角三角形		球面直角三角形	
$\sin A = \dfrac{a}{c}$	$\sin B = \dfrac{b}{c}$	$\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$	$\sin B = \dfrac{\sin b}{\sin c}$
$\cos A = \dfrac{b}{c}$	$\cos B = \dfrac{a}{c}$	$\cos A = \dfrac{\tan b}{\tan c}$	$\cos B = \dfrac{\tan a}{\tan c}$
$\tan A = \dfrac{a}{b}$	$\tan B = \dfrac{b}{a}$	$\tan A = \dfrac{\tan a}{\sin b}$	$\tan B = \dfrac{\tan b}{\sin a}$
$\sin A = \cos B$	$\sin B = \cos A$	$\sin A = \dfrac{\cos B}{\cos b}$	$\sin B = \dfrac{\cos A}{\cos a}$
$c^2 = a^2 + b^2$		$\cos c = \cos a \cos b$	
$1 = \cot A \cot B$		$\cos c = \cot A \cot B$	

Napier の法則

上述の１０個の公式は、

$$\mathbf{A} = \frac{\pi}{2} - A,\quad \mathbf{B} = \frac{\pi}{2} - B,\quad \mathbf{c} = \frac{\pi}{2} - c,$$

とおくと簡単に表すことができます。

すなわち、

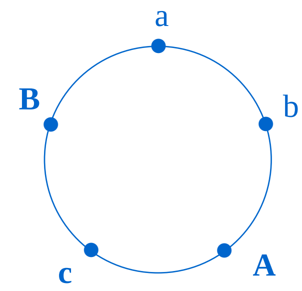
$$\sin\mathbf{A} = \cos\mathbf{B}\cos a = \tan b \tan\mathbf{c}$$

$$\sin\mathbf{B} = \cos\mathbf{A}\cos b = \tan a \tan\mathbf{c}$$

$$\sin a = \cos\mathbf{A}\cos\mathbf{c} = \tan b \tan\mathbf{B}$$

$$\sin b = \cos\mathbf{B}\cos\mathbf{c} = \tan a \tan\mathbf{A}$$

$$\sin\mathbf{c} = \cos a \cos b = \tan\mathbf{A}\tan\mathbf{B}$$



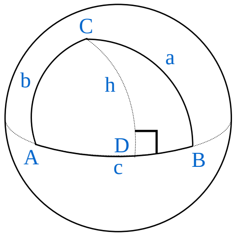
いま、図のように a，**B**， **c**， **A**，b をこの順序で円周上にとり、このうち任意の一つの要素、例えば a の両隣りの **B**，b を隣接要素、他の二つ **c**，**A** を対向要素と呼ぶことにすると、上の公式はつぎのように述べることができます。

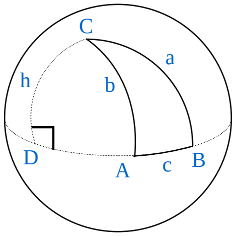
ある要素の正弦は、その対向要素の余弦の積に等しく、また隣接要素の正接の積にも等しい。

これを**ナピア (Napier) の法則**といいます。

正弦法則

つぎに、一般の球面三角形について成り立つ重要な公式を調べてみましょう。
まず、球面三角形ＡＢＣの一つの頂点Ｃからその対辺ＡＢ、またはその延長と直交する大円の弧をＣＤとします。ＣＤ＝ｈとすれば、直角球面三角形の性質から、





$$\sin A = \frac{\sin h}{\sin b} \qquad \therefore \quad \sin h = \sin A \sin b$$

また　　$\sin h = \sin B \sin a$

$$\therefore \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

同様に　$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

よってつぎの定理が得られます。

定理２：球面三角形ＡＢＣについて

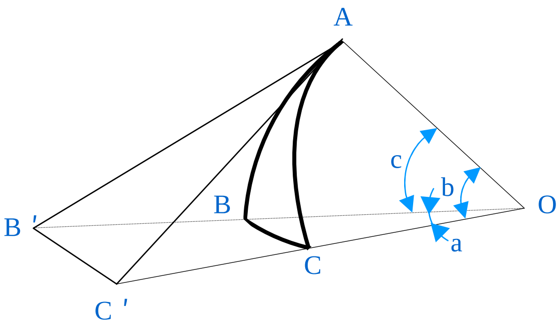
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

が成り立つ。

これを、球面三角形の**正弦法則**といいます。

余弦法則

球面三角形ＡＢＣの各頂点を球の中心Ｏと結び、頂点Ａから辺ＡＢ，ＡＣに接線をひき、それが直線ＯＢ，ＯＣと交わる点をそれぞれＢ′,Ｃ′とします。
三角形ＯＢ′Ｃ′とＡＢ′Ｃ′に平面三角形の余弦法則を適用すると、



$$B'C'^2 = OB'^2 + OC'^2 - 2OB' \cdot OC' \cos a$$

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB' \cdot AC' \cos A$$

$$\therefore \quad 2OB' \cdot OC \cos a = (OB'^2 - AB'^2) + (OC'^2 - AC'^2) + 2AB' \cdot AC' \cos A = 2OA^2 + 2AB' \cdot AC' \cos A$$

$$\therefore \quad \cos a = \frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OA}{OC'} + \frac{AB'}{OB'} \cdot \frac{AC'}{OC'} \cos A$$

$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

従って、つぎの定理が得られます。

定理3：球面三角形ABCについて、つぎの等式が成り立つ。

$$\mathbf{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A}$$

$$\mathbf{\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B}$$

$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}$$

この公式を球面三角形の**余弦法則**といいます。

つぎに、上の公式で、第二式の cos b を第一式に代入すると、

$$\cos a = (\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B) \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$(1 \cdot \cos^2 c)\cos a = \sin c \sin a \cos c \cos B + \sin c \sin b \cos A$$

$$\therefore \quad \sin^2 c \cos a = \sin c \sin a \cos c \cos B + \sin c \sin b \cos A$$

両辺を sin c で割って移項すれば、

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

同様にしてつぎの定理が得られます。

定理4：球面三角形ABCについて、つぎの等式が成り立つ。

$$\mathbf{\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}$$

$$\mathbf{\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A}$$

$$\mathbf{\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B}$$

$$\mathbf{\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B}$$

$$\mathbf{\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}$$

$$\mathbf{\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}$$

これを球面三角形の**正弦余弦法則**といいます。

半角の三角関数

余弦法則から、

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\mathrm{Sin}\, b \sin c}$$

$$\therefore \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sin\dfrac{a+b-c}{2} \sin\dfrac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}$$

いま、$a + b + c = 2s$ とおけば、

$$\frac{a+b-c}{2} = s - c, \quad \frac{a-b+c}{2} = s - b$$

また、$0 < A < \pi$ であるから $\sin(A/2) > 0$ よって

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

同様に

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c \sin a}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

で、これらを (2.2) とします。

全く同様にして $\cos^2(A/2) = (1/2)(1 + \cos A)$ から、

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

同様に

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

で、これらを (2.3) とします。

また、(2.2) (2.3) からつぎの公式が与えられます。

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

半辺の三角関数

球面三角形ＡＢＣの極三角形をＡ′Ｂ′Ｃ′とすると、
極三角形の項の定理３によって、

$$A' = \pi - a,\quad B' = \pi - b,\quad C' = \pi - c$$

$$a' = \pi - A,\quad b' = \pi - B,\quad c' = \pi - C$$

いま、 $a' + b' + c' = 2s,\quad A + B + C - \pi = E$

とおけば、

$$s' = \frac{1}{2}(a' + b' + c') = \frac{1}{2}(3\pi - A - B - C)$$

$$= \pi - \frac{E}{2}$$

同様に、 $s' - a' = A - \frac{E}{2},\quad s' - b' = B - \frac{E}{2}$

$$s' - c' = C - \frac{E}{2}$$

従って、 $\sin\frac{a'}{2} = \cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{a'}{2} = \sin\frac{A}{2}$

など、

$$\sin s' = \sin\frac{E}{2},\quad \sin(s' - a') = \sin\left(A - \frac{E}{2}\right)$$

$$\sin(s' - b') = \sin\left(B - \frac{E}{2}\right)$$

$$\sin(s' - c') = \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)$$

球面三角形Ａ′Ｂ′Ｃ′について、公式 (2.2) (2.3) (2.4) に相当する式を作って、上の関係を代入すると、

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(A - \frac{E}{2}\right)}{\sin B\sin C}}$$

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(B - \frac{E}{2}\right)}{\sin C\sin A}}$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\sin A\sin B}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\sin C}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin C\sin A}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin A\sin B}}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}$$

$$\tan\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}}$$

$$\tan\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)}}$$

この E を**球面過剰**といいます。

Delambre-Gauss の公式

加法定理で $\sin\frac{A+B}{2}$ を展開すると、

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

この右辺に半角の公式 (2.2) と (2.3) を代入して変形すると、

$$\sin\frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin^2(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin^2 c}} + \sqrt{\frac{\sin s\sin^2(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin^2 c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} \cdot \frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}$$

$$= \cos\frac{C}{2} \cdot \frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \cos\frac{C}{2} \cdot \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

全く同様にして、つぎの公式が得られます。

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

これを**デランブル･ガウス (Delambre - Gauss) の公式**といいます。

Napier の公式

デランブル・ガウスの公式からただちに、

$$\tan\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

これを**ナピア (Napier) の公式**といいます。

また、この公式から容易に、

$$\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

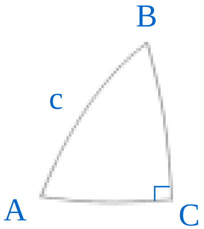
が得られます。これを球面三角形の**正接法則**といいます。

これらの公式は、球面三角形の解法でしばしば用いられます。

直角球面三角形の解法

(1) 1角 A と斜辺 c が与えられた場合

求めるのは、２辺 ａ，ｂ と角 Ｂ です。



公　式　　$\sin a = \sin c \sin A$

$\tan b = \tan c \cos A$

$\cot B = \cos c \tan A$

検算式　　$\sin a = \tan b \cot B$

ａとＡはともに９０°より小さいか大きいかですから、はじめにＡ＜９０°またはＡ＞９０°を与えれば、ａもそれに応じてａ＜９０°、ａ＞９０°としてただ一通りに決まります。従って、この場合は解はただ一つです。ただし、ｃとＡが直角のときは、ａ＝９０°であって、ｂとＢは決まりません。

(2) 直角をはさむ1辺 b ととなりの角 A が与えられた場合

求めるのは、２辺 ａ，ｃ と角 Ｂ です。

公　式　　$\tan a = \tan A \sin b$，　$\tan c = \tan b / \cos A$

$\cot B = \cos b \sin A$

検算式　　$\cos B = \tan a \cot c$

この場合は、解はただ一つです。

⑶ 直角をはさむ2辺 a，b が与えられた場合

求めるのは、辺 ｃ と２角 Ａ， Ｂ です。

公　式　　$\cos c = \cos a \cos b$，　$\cot A = \cot a \sin b$

$\cot B = \cot b \sin a$

検算式　　$\cos c = \cot A \cot B$

この場合も、解はただ一つです。

⑷ 斜辺 c と1辺 a が与えられた場合

求めるのは、辺 ｂ と２角 Ａ， Ｂ です。

公　式　　$\cos b = \dfrac{\cos c}{\cos a}$ ，　$\cos B = \dfrac{\tan a}{\tan c}$

$\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$

検算式　　$\cos B = \cos b \sin A$

ａ， Ａはともに第一象限か第二象限にありますから、第三式によりａ， ｃが与えられたときＡは一意的に決まります。第一、第二式からｂ，Ｂは余弦の値が与えられていますので、これも一意的に決まります。従って、解はただ一つです。ただしｃ＝ａ＝９０°のときＡ＝９０°で、ｂ，Ｂは決まりません。

⑸ 2角 A，B が与えられた場合

求めるのは、３辺 ａ， ｂ， ｃ です。

公　式　　$\cos c = \cot A \cot B$,　$\cos a = \dfrac{\cos A}{\sin B}$

$\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$

検算式　　$\cos c = \cos a \cos b$

この場合も、解はただ一つです。ただし、第二、第三式からａ， ｂが求められるためには cos Ａ ≦ sin Ｂ ,cos Ｂ ≦ sin Ａ でなければなりません。

⑹ 1辺 a とその対角 A が与えられた場合

求めるのは、２辺 ｃ， ｂ と角 Ｂ です。

公　式　　$\sin c = \dfrac{\sin a}{\sin A}$ ，　$\sin b = \tan a \cot A$

$\sin B = \dfrac{\cos A}{\cos a}$

検算式　　$\sin b = \sin c \sin B$

第一式において、sin ａ ＜ sin Ａ のとき、これを満たす ｃ の値は二つあります。従って、それぞれの値に対して ｂ と Ｂ の値もそれぞれ決まります。

斜角球面三角形の解法

(1) 3辺 a，b，c が与えられた場合

求めるのは、３つの角 Ａ，Ｂ，Ｃ です。

公式

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\tan k}{\sin(s-a)}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{\tan k}{\sin(s-b)}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{\tan k}{\sin(s-c)}$$

$$\tan k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(2) 3つの角 A，B，C が与えられた場合

求めるのは、３つの辺 ａ，ｂ，ｃ です。

公式

$$\tan\frac{a}{2} = \tan K\cos(S-A)$$

$$\tan\frac{b}{2} = \tan K\cos(S-B)$$

$$\tan\frac{c}{2} = \tan K\cos(S-C)$$

$$\tan K = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

$$S = \frac{1}{2}(A+B+C)$$

(3) 2辺 a, b とその挟角 C が与えられた場合
求めるのは、２角 Ａ，Ｂ と辺 ｃ です。

公式

$$\tan\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

この２式から（A + B）/ 2 と (A – B) / 2 を求め、それから Ａ，Ｂを求める。またｃは以下の式から求める。

$$\cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\cos\frac{C}{2}$$

(4) 2角 A, B と頂点間の辺 c が与えられた場合
求めるのは、角 Ｃ と２辺 ａ，ｂ です。

公式

$$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cos\frac{c}{2}$$

(5) 2辺 a, b とその一つの対角 A が与えられた場合
求めるのは、辺 ｃ と２角 Ｂ，Ｃ です。

公式
$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{A-B}{2}$$

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \tan \frac{a-b}{2}$$

この第一式は正弦法則で、sin B ＞1 のとき、解ありません。sin B = 1 のとき B = 90 °, sin B ＜1 のとき B は二つの値をもちます。このうち一つは鋭角で、他は鈍角です。第一式で B を求めたら第二式から C を求めることができます。

(6) 2角 A, B とその一つの対辺 a が与えられた場合
求めるのは、角 Ｃ と２辺 ｂ，ｃ です。

公式
$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$$

$$\cot \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \cot \frac{a-b}{2}$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \tan \frac{A-B}{2}$$

この場合も（５）と同様に、b の解は二つあります。